

TD6

Exercice 1. Calculer la transformée de Fourier

- fonction “porte” $p_a(t)$ définie par

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a, \\ 0 & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

- $f(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)$, où $\Theta(t)$ désigne la fonction de Heaviside.

Calculer la transformée de Fourier inverse des résultats.

Exercice 2. Démontrer les propriétés suivantes de la transformation de Fourier:

- Si $g(t) = f(t - a)$ alors $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega a}$,
- Si $g(t) = f(t)e^{i\omega_0 t}$ alors $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$.

Exercice 3.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

2. En utilisant le résultat, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{t \cos t - \sin t}{t^3} \cos \frac{t}{2} dt.$$

Exercice 4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Considérez la limite du résultat quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comment peut-on interpréter la limite

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} ?$$